Chapitre II : Cinématique du point matériel :

I - Généralités

- c'est l'étude du mvt du point mat sans tenir conte les causes de ce mvt.
- un point mat est une région de l'espace très petite où est localisée une quantité de matière.
- La description du mvt se fait par rapport à un observateur pour cela un refferentiel défini par un système d'axes de coordonnés est liée à cet observateur est muni d'un moyen de mesurer le temps.
- Le refferentiel sera designé par $R(O;x;y;z)$. Le repère lié à R est le repère cartésien, pour décrire le mvt d'un point matériel on peut considérer d'autre repère autre que le repère defini par le système d'axes de refferentiel.

Conclusion : à un peuvent être attacher plusieurs repères de projection qui ne sont pas considérés des réferentiels.

II - Vecteur position :

Dans un refferentiel R la position d'un point mat M à un instant t est défini par $\vec{r}(t) = \vec{OM}$.

Elle peut être exprimer dans differents systèmes de coordonnés cartésiens.

1 - Système de coor cartésien :

- Repère cart : $R(O;x;y;z)$ - Base associé $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ou $(\vec{e_x};\vec{e_y};\vec{e_z})$
- $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.
- vect déplacement élementaire : Soit M la position du pt mat à un instant t et M' le point à un instant $(t+\Delta t)$

$\Delta\vec{OM} = \vec{OM'} - \vec{OM}$ or $M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ et $M' : \begin{vmatrix} x+\Delta x \\ y+\Delta y \\ z+\Delta z \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \Delta\vec{OM} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$

quand $M' \to M$ on écrit : $d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ est le vect dép élementaire on écrit aussi $d\vec{r}$.



2- Système de Coord Cylindriques :

- Coord Cylindriques sont : $r = \|\vec{OH}\|$ $r \geq 0$

- $\theta = (\vec{Ox}; \vec{Om})$ $0 \leq \theta \leq \pi$

- $z = $ . . .

- Base associé : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}; \vec{e_z})$.

$\Rightarrow \vec{OH} = \vec{Om} + \vec{mH} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$

Exprimant le sys cyl en fct du sys cart

$\vec{e_r} = Proj_{ox}(\vec{e_r})\vec{i} + Proj_{oy}(\vec{e_r})\vec{j} + Proj_{oz}(\vec{e_r})\vec{k}$

$= (\vec{e_r}.\vec{i}).\vec{i} + (\vec{e_r}.\vec{j})\vec{j} + (\vec{e_r}.\vec{k})\vec{k}$

$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + 0.$

de m on trouve : $\vec{e_\theta} = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.

$= -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

$\vec{OH} = r\cos\vec{i} + r\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$ qui donne alors :

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ et par inversion $r = f(x;y;z)$

$\theta = f(x;y;z)$

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$.

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

et on a : $\frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow \boxed{\theta = \text{Arctan}\,\frac{y}{x}}$

+ vect dep elementaire : $d\vec{OH} = d(r\vec{e_r} + z\vec{e_z}) = d(r\vec{e_r}) + d(z\vec{e_z})$.

$= dr\vec{e_r} + r\,d\vec{e_r} + dz\vec{e_z} + z\,d\vec{e_z}$.

$d\vec{e_r}$? $\vec{e_r}$ dépend de θ : $d\vec{e_r} = \frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\theta}d\theta = (-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})d\theta = \vec{e_\theta}d\theta$.

$\Rightarrow \boxed{d\vec{OH} = dr\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\vec{e_z}}$

Remarque:

* $\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\theta} = \vec{e_\theta}$ * de m on a : $\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -\vec{e_r}$

* Lorsque M se deplace, les vecteurs $\vec{e_r}$; $\vec{e_\theta}$ changent $\Rightarrow (\vec{e_r}; \vec{e_\theta}; \vec{e_z})$ est une base mobile.

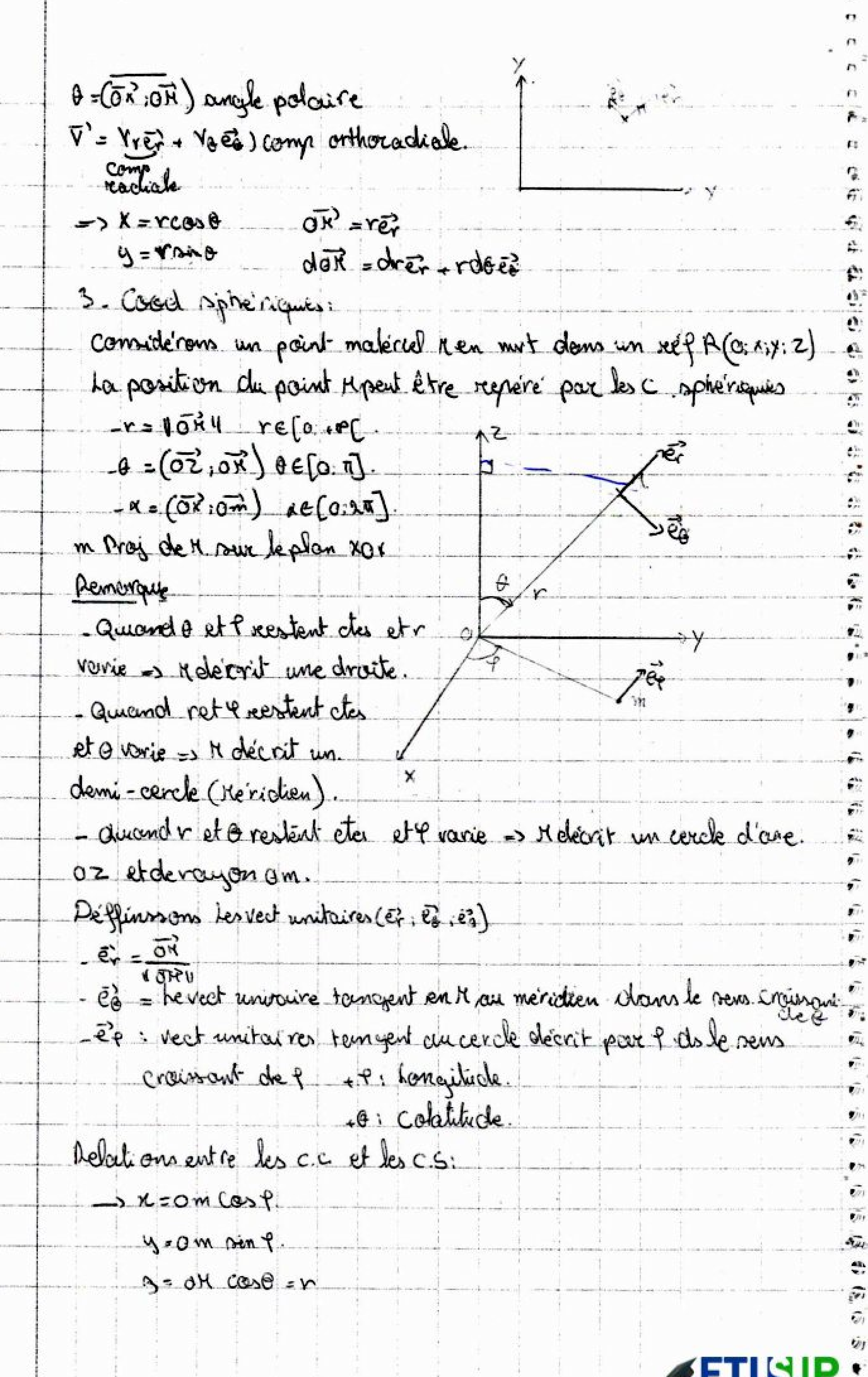
* un vect qq $\vec{V}$ peut être décrit : $\vec{V} = V_r\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta} + V_z\vec{e_z}$

Cas particulier:

Cas d'un plan où $(z=0)$

$r = \|\vec{OH}\|$: rayon polaire.

ETUSUP .com



$\theta = (\overrightarrow{OX} ; \overrightarrow{OM})$ angle polaire

$\vec{V}' = V_r\vec{e_r} + V_\theta \vec{e_\theta}$) comp orthoradiale.
comp radiale

$\Rightarrow x = r\cos\theta$ $\qquad \overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$

$y = r\sin\theta$ $\qquad d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

3. Coord sphériques:

Considérons un point matériel M en mvt dans un réf $R(O; x; y; z)$

La position du point M peut être repéré par les C. sphériques

- $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ $\quad r \in [0, +\infty[$
- $\theta = (\overrightarrow{OZ} ; \overrightarrow{OM})$ $\theta \in [0, \pi]$.
- $\varphi = (\overrightarrow{OX} ; \overrightarrow{Om})$ $\varphi \in [0, 2\pi]$.

m proj de M sur le plan xOy

<u>Remarque</u>

- Quand θ et φ restent ctes et r varie ⇒ M décrit une droite.
- Quand r et φ restent ctes et θ varie ⇒ M décrit un demi-cercle (Méridien).
- Quand r et θ restent ctes et φ varie ⇒ M décrit un cercle d'axe Oz et de rayon Om.

Définissons les vect unitaires $(\vec{e_r} ; \vec{e_\theta} ; \vec{e_\varphi})$

- $\vec{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$
- $\vec{e_\theta}$ = le vect unitaire tangent en M au méridien dans le sens croissant de θ
- $\vec{e_\varphi}$: vect unitaires tangent au cercle décrit par φ ds le sens croissant de φ
  - φ : longitude.
  - θ : colatitude.

Relations entre les C.C et les C.S:

$\rightarrow x = Om\cos\varphi$.

$y = Om\sin\varphi$.

$z = OM\cos\theta = r$

ETUSUP.com

d'après la figure $\rho = OM$ et $\sin\theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow OM = r\sin\theta$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Retrouvons r, θ, φ en fct de $(x; y; z)$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\cos^2\theta$.

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\rho = ?$ $\frac{y}{x} = tg\,\alpha \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{y}{x}$.

$x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta \Rightarrow r\sin\theta = \sqrt{x^2+y^2}$.

$z = r\cos\theta$ $\quad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$

Expressons les vects uni. sphe en fct des vects unit c:

$\to$ Projectons $\vec{e}_r$ sur $(\vec{Oz}; \vec{Om})$

$\vec{e}_r = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\vec{e}_\varphi + \cos\theta\vec{k}$

$\to$ Projectons $\vec{e}_\varphi$ sur $(Ox; Oy)$

$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi + \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$

$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$

$e_\varphi = \frac{\vec{Om}}{\|\vec{Om}\|}$

vect position $\vec{OM} = ?$

en CS $\vec{OM} = r\vec{e}_r$

$\Rightarrow \vec{OM} = r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{OM} = \underbrace{r\sin\theta\cos\varphi}_{x}\,\vec{i} + \underbrace{r\sin\theta\sin\varphi}_{y}\,\vec{j} + \underbrace{r\cos\theta}_{z}\,\vec{k}$

vect déplacement élementaire

$d\vec{OM} = d(r\vec{e}_r) = dr\,\vec{e}_r + r\,d\vec{e}_r$

or $d\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\theta}d\theta + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}d\varphi$.

$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta$

$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\cdot\cos\varphi\,\vec{j}$

$= \sin\theta\cdot\vec{e}_\varphi$



$\Rightarrow d\vec{e_r} = d\theta \vec{e_\theta} + \sin\theta \, d\varphi \, \vec{e_\varphi}$

$d\vec{OM} = dr\vec{e_r} + r d\theta \vec{e_\theta} + r\sin\theta \, d\varphi \, \vec{e_\varphi}$

III - Trajectoire d'un point mat:

1. Equ du mvt

- Soit un point mat en mvt par rapport à un referentiel R en se deplaçant le pt M décrit une courbe (C) appelée : Trajectoire. La nature de la trajectoire dépend du refferentiel choisi. L'équ paramétrique de la trajectoire de M est donnée par les coordonnées de M ds la base choisi en fct du temps.
  - C.C : $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$.
  - C. Cyl : $r(t)$; $\theta(t)$; $z(t)$
  - C. sphé : $r(t)$; $\theta(t)$; $\varphi(t)$.

Les équ obtenues st appelés : équations horaires du mvt

- On definit aussi ce qu'on appel l'équ cartésienne de la trajectoire elle est obtenue en éliminant le paramètre t entre les differente coordonnés cartésiens

Exemples : $\vec{OM} = r\cos\omega t \, \vec{i} + r\sin\omega t \, \vec{j}$

Les éq horaires du mvt sont :

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = r\cos(\omega t) \\ y(t) = r\sin(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow y = f(x) \quad \text{équ . cart}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$: C l'équ d'un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon r.

La trajectoire décrite par M est un cercle.

C/C : - L'équ de la trajectoire permet de donner son allure.

2. Abcisse curviligne :

- Soit par exemple x ; y ; z les coord cartésiens d'un pt M en mvt et dx ; dy ; dz des déplaçements élementaires lorsque le pt se déplace le long d'un trajectoire (C) d'une longueur élémentaire noté ds est donnée par $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$: c un élement d'arc aussi $ds = \|d\vec{OM}\|$



$d\vec{OM}$: vect dep. elementaires.

On appel abscisse curviligne de M le long de (C) à partir d'un point M_0 de (C) est la longueur de l'arc $\widehat{M_0M}$

$$S(t) = \int ds = \int \frac{ds}{dt}\, dt$$

$$S(t) = \int_t \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}}\, dt$$

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \widehat{M_0M}$$

où t_0 est l'instant où le pt se trouve en M_0

t " " " " " " M.

$S_{(M)}$: abscisse curviligne du pt M entre t_0 et t.

S(t) : est l'équ horaire intrinsèque du mvt

3 _ Tangente d'une trajectoire (C)

_ La tangente au pt M c la droite la plus proche possible de la courbe (C) au voisinage de M.

_ Le vect unitaire $\vec{e_t}$ est celui porté par la tangente de M et orienté dans le sens du mvt.

_ $\vec{e_t} = ?$

Le vect unitaire $\vec{e_t}$ est défini aussi par $\vec{e_t} = \frac{d\vec{OM}}{\| d\vec{OM} \|} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$

4 _ Base ou repère de Frenet

* On defini en un point M qq de la trajectoire le repère locale appelé repère de Frenet (base de Frenet) par le vect unitaire suivant :

$\vec{e_t}$ = vect unit tangent à (C)

$\vec{e_n}$: " " normal à (C) orienté vers l'intérieur de (C) est definie par :

$$\vec{e_n} = \rho \frac{d\vec{e_t}}{ds}$$

ou ρ est le rayon de courbe de la tg (C)

$\vec{e_b}$ = vect unitaire, ce vect complète le tétraèdre directe $(\vec{e_t}; \vec{e_n}; \vec{e_b})$

Cas particulier trajectoire circulaire → coord polaires :

$$\begin{cases} r = R = cte \\ \theta = [0, 2\pi] \end{cases}$$

ETUSUP .com

D'après la fig :

→ $\vec{e_t}$ s'identifie à $\vec{e_\theta}$

→ $\vec{e_n} = \frac{d\vec{e_t}}{dS} = R\frac{d\vec{e_t}}{dS} = R\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dS}$

On sait que $\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r}$

$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r}$

$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{R}$ car $S = R\theta \Rightarrow dS = R\,d\theta$

$\vec{e_n} = R\left(\frac{-\vec{e_r}}{R}\right) = -\vec{e_r}$

dans le cas de trajectoire circulaire :

$\vec{e_t} = \vec{e_\theta} \neq \vec{e_n} = -\vec{e_r}$

IV - Vecteur vitesse

Soit $R(O;x,y,z)$ un réf donné et M un pt matériel, en mvt ds R

1 - Vitesse moyenne :

* Soit t l'instant où le point est à la position M. Soit $t' = t + \Delta t$ l'instant de la position M'

⇒ La vitesse moyenne est définie par $\vec{v}_m = \frac{\vec{OM'} - \vec{OM}}{\Delta t} = \frac{\vec{MM'}}{\Delta t}$

et $\|\vec{v}_m\| = \frac{\widehat{MM'}}{\Delta t} = \frac{S(t') - S(t)}{\Delta t}$

où $S(M) = \widehat{M_0M}$ et $S(t') = \widehat{M_0M'}$ où M_0 est l'origine choisie sur la trajectoire (C) à l'instant initiale t_0.

2 - Vect vitesse instantannée :

* Il est défini $\vec{v}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{MM'}}{\Delta t}$ (M' est très proche de M)

quand $M' \to M$ et $\Delta t \to 0$: $\vec{MM'} = d\vec{OM}$, $\Delta t = dt$

⇒ $\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$: dérivée du vect position par rapport au temps

or $d\vec{OM} = d\vec{S}$ et $\vec{v}(M) = \frac{dS}{dt}\vec{e_t} = \dot{S}\vec{e_t}$

⇒ caractéristiques du vect $\vec{v}$:

* pt d'app : M
* Direction : Tangente en M de la trajectoire
* Le sens : Sens de la trajectoire / mvt
* Module : $\|\vec{v}\| = v = \dot{S}$: vitesse linéaire ou scalaire



3. Hodographe du mvt :

* Le vect vitesse d'un pt M dans un réf R peut être associé à un point P tel que $\vec{O'P} = \vec{v}(M)$. où O' est un pt fixe de R. P n'est pas un point de l'espace des positions, il évolue dans un autre espace qui est l'espace des vitesses.

→ L'hodographe du mvt d'un point mobile est la trajectoire du pt P (la courbe qui le décrit)

Espace des vitesses (fictif)

Espace des dispositions (Réel)

* L'éq de l'Hodographe est obtenue en éliminant le paramètre "t" entre les composantes du vect vit.

V - Vecteur accélération :

* Il est défini par $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ou aussi $\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt}$ (aussi noté $\vec{a}$)

* L'accélération exprime la vitesse avec laquelle la vitesse du pt mot mobile varie.

* Les caractéristiques de $\vec{\gamma}$: * L'origine : la pos à l'instant t du pt M
* La direction : orienté par la tg à l'hodographe
* Le sens est orienté vers l'intérieur de la traj

VI - Expressions des vect $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$

* Exprimons $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ ds les différents systèmes de coordonnées.

1 - Système Cart :

* Vect pos : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

ETUSUP .com

* $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$.

$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ sont fixes par rapport à R.

* $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad (\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

2. Système cylindrique:

* Base: $(\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_z})$
* $\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$.
* $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$

$= R + z\frac{d\vec{e_z}}{dt}$ ($\vec{e_z}$ est fixe % à R)

$d\vec{e_r} = \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\theta}.d\theta = d\theta\,\vec{e_\theta}$

$\Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} = \dot{\theta}.\vec{e_\theta}$

$\Rightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_z})$

* $\vec{\gamma} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \frac{d(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{z}\vec{e_z})}{dt}$

$= \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + \ddot{z}\vec{e_z}$

$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\vec{e_r})$

$\Rightarrow \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{(\vec{e_r};\vec{e_\theta};\vec{e_z})}$

* cas particulier: Coord. polaires
  * $z = 0$
  * $\vec{v}$ $\left(\begin{array}{l} \dot{r} : \text{comp radiale} \\ r\dot{\theta} : \text{comp orthoradiale} \end{array} \right.$
  * $\vec{\gamma}$ $\left(\begin{array}{l} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 : \text{comp rad} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} : \text{comp ortho.} \end{array} \right.$

* Système sphérique:
  * Base: $(\vec{e_r},\vec{e_\theta};\vec{e_\varphi})$
  * $\vec{OM} = r\vec{e_r}$
  * $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt}$

ETUSUP.com

or $\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} + \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi}$

$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

• $\vec{\gamma} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \frac{d(\sin\theta)}{dt} = \underbrace{\frac{d\sin\theta}{d\theta}}_{\cos\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$ $\quad \cos\theta\cdot\dot{\theta}$

$\vec{\gamma} = \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} + \dot{r}\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + r\sin\theta\dot{\varphi}\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}$
$+ r\sin\theta\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

• $\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{1}{dt}\left(\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\theta}.d\theta + \frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\varphi}.d\varphi\right)$

$= \frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\theta}.\dot{\theta} + \frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\varphi}.\dot{\varphi}$

$\vec{e_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}$

$\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\theta} = -\vec{e_r}$

$\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial\varphi} = -\cos\theta\sin\varphi\vec{i} + \cos\theta\cos\varphi\vec{j}$

$= \cos\theta(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j})$

$= \cos\theta.\vec{e_\varphi}$

$$\boxed{\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_r} + \cos\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}}$$

Calculons $\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}$: $\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = \frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi}.\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j})$

or $\sin\theta(\vec{e_r}) = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k}$

$\cos\theta(\vec{e_\theta}) = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}$

on remplace que $\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\vec{e_\theta} = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$

$\Rightarrow \frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}(\sin\theta\vec{e_r} + \cos\theta\vec{e_\theta})$

$$\vec{\gamma}_{/R} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 - r(\dot{\varphi})^2\sin^2\theta \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r(\dot{\varphi})^2\sin\theta\cos\theta \\ r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix} (\vec{e_r}, \vec{e_\theta}; \vec{e_\varphi})$$

4- Comp $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ ds le repère de Frenet:

• Dans la base de Frenet le vecteur vitesse n'admet qu'une seule composante : Tangentielle.

• Par déf : $\vec{V}_R(M) = \dot{S}\vec{e_t} = v\vec{e_t}$

ETUSUP .com

Système cartésien $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\vec{v}_R(M) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ \vec{e}_t.$$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}$$

* vect accélération:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}.\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}.\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt})?$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt}$$

or: $\vec{e}_n = \rho.\frac{d\vec{e}_t}{ds}$ et $\frac{ds}{dt} = \dot{S} = v$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho}.\vec{e}_n$$

$$\vec{\gamma} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\gamma_t}\vec{e}_t + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{\gamma_n}.\vec{e}_n$$

γ_t : compos tang de $\vec{v}$ liée à la variation du module de $\vec{v}$.

γ_n : compos normale du vect $\vec{v}$ liée au rayon du courbure de la traj

Rq: * $\vec{v} \wedge \vec{\gamma} = (v\vec{e}_t) \wedge \left(\frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n\right)$

$$= \frac{v^3}{\rho}.\vec{e}_n.$$

$$\|\vec{v} \wedge \vec{\gamma}\| = \frac{v^3}{\rho}$$

On peut déterminer alors le rayon du courbure ρ par

$$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{\gamma}\|}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_x\vec{i} + \gamma_y\vec{j} + \gamma_z\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_t\vec{e}_t + \gamma_n\vec{e}_n$$

$$\gamma_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{v^3}\|\vec{v} \wedge \vec{\gamma}\|$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2}$$

$$\gamma_n^2 = \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 - \gamma_t^2$$



VII _ Exemples de mouvements simples

1_ Nature du mvt :

* Un mvt est accéléré si $\|\vec{v}\|$ augmente $\frac{d\vec{v}}{dt} > 0$

et aussi $\frac{dv^2}{dt} > 0$ $\frac{d(v.v)}{dt} = 2v\frac{d.v}{dt} \Rightarrow v.\frac{dv}{dt} > 0$ mvt accéléré

ou encore $\frac{d(\vec{v}.\vec{v})}{dt} = 2\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{v}.\vec{\gamma} > 0$ pour un mvt accéléré

* de m̂ pour le mvt retardé $\|\vec{v}\|$ décroit

avec le m̂ raisonnement $\vec{v}.\vec{\gamma} < 0$

* mvt rectiligne : $(v = cte)$

$\frac{d(\vec{v}.\vec{v})}{dt} = 2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$

$\vec{v}.\vec{\gamma} = 0$

$\Rightarrow$ deux cas à distinguer

_ $\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow$ Il s'agit d'un mvt rectiligne uniforme.

_ $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ sont orthogonaux $\Rightarrow$ mvt circulaire uniforme.

2_ Mvt rectiligne :

* Trajectoire droite :

$\rho \to \infty \Rightarrow \gamma_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$

$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_t$

* Eq horaire du mvt : Supposons que le pt M se déplace sur un axe OX

O $\vec{i}$ M X

- $\vec{OM} = x\vec{i}$

- $\vec{v} = \dot{x}\vec{i}$

- Si $\gamma = cte = \gamma_0 \Rightarrow \ddot{x} = \gamma_0 \Rightarrow \dot{x} = \gamma_0 t + v_0$.

à $(t = 0 ; \dot{x} = v_0)$.

$x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t + x_0$ $(x(0) = x_0)$.

L'éq horaire du mvt rectiligne avec $\gamma = cte$.

* Selon γ on a :

$\rightarrow$ Si $\gamma_0 = 0$: mvt rectiligne uniforme.



+ Si $\gamma > 0$: mvt uniformément accéléré
+ Si $\gamma < 0$: " " retardé
$\vec{v} \cdot \vec{\gamma} > 0$ ($\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ ont le m̂ sens) $\vec{v} \cdot \vec{\gamma} < 0$ (sens contre)

→ Parmi les exemples du mvt rectiligne : un corps en chute libre.

3 _ Mvt Circulaire

• Relativement au référentiel $R(O;x;y;z)$ le pt M se déplace sur un arc de cercle d'axe (Oz).

– Base d'étude choisie : Base polaire.

$$\Rightarrow \begin{cases} r = R = cte \\ \theta = \theta(t) = (\widehat{\vec{Ox};\vec{OM}}) \end{cases}$$

(Ox appelé l'axe polaire).

Abscisse curviligne : $S(t) = R\,\theta(t)$ ou encore $d\vec{OM} = R\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

$$\Rightarrow \begin{cases} dS = \|d\vec{OM}\| = R\,d\theta \\ S(t) = \int R\,d\theta = R\,\theta(t) \end{cases}$$

– Vecteur vitesse :

$\rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ $(r = R)$

– Cas d'un cercle $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = R\dot{\theta}\,\vec{e_t} \Rightarrow v = R\dot{\theta}$

on pose $\omega = \dot{\theta}$ c'est la vitesse angulaire.

Rq : En se déplaçant sur le cercle, le pt M est en rotation autour de l'axe (Oz) alors on peut définir le vect ($\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e_z}$)

$$\Rightarrow \vec{v} = R.\omega.\vec{e_\theta}$$
$$= R.\omega\,(\vec{e_z} \wedge \vec{e_r})$$
$$= (\omega\vec{e_z}) \wedge (R\vec{e_r})$$
$$\vec{v}(M) = (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

– vect d'accélération : dans la base de Frenet : $\vec{v} = R\,\omega\,\vec{e_t}$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\,\vec{e_t} + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{e_n}$$

$\gamma_t = R.\frac{d\omega}{dt} = R\ddot{\theta}$ (A dém que $\rho = R$).

$\gamma_n = \frac{(R\omega)^2}{\rho} = R\,\omega^2$

Cas particulier :

$\omega = cte$: mvt circulaire uniforme $\Rightarrow v = cte \Rightarrow \begin{cases} \gamma_t = \frac{dv}{dt} = 0 \\ \gamma_n = R.\omega^2 \end{cases}$



$\vec{v} = v.\vec{e_t}$ et $\vec{\gamma} = \gamma_n.\vec{e_n}$

$\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{\gamma}$

Ex : le mvt circulaire : mvt d'un pendule conique.

un voiture de course qui se déplace sur une piste circulaire

4- mvt hélicoïdal : $R(O, x, y, z)$

Par rapport au réf le point M se déplace sur une hélice circulaire (l'hélice est enroulée sur un cylindre de rayon R).

$$\begin{cases} r = R = cte \\ \theta(t) = fct\ de\ temps \\ z(t) = h.\theta(t)\ /h = cte \end{cases}$$

Vect position : $\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$

$= R\vec{i} + h\theta.\vec{e_z}$

vect vitesse : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} + h\dot{\theta}\vec{e_z}$

vect accélération $\vec{\gamma} = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R(\dot{\theta})^2\vec{e_r} + h\ddot{\theta}\vec{e_z}$

Cas particulier : $\omega = \dot{\theta} = cte$.

$\vec{\gamma} = -R(\dot{\theta})^2\vec{e_r} = -R\omega^2\vec{e_r}$

vect accé ds la base de Frenet.

+ Comp tg $\gamma_t = \frac{dv}{dt}$; $v = \sqrt{R^2\omega^2 + h^2\omega^2} = \omega\sqrt{R^2+h^2}$

$\Rightarrow \gamma_t = \sqrt{R^2+h^2}\frac{d\omega}{dt}$

cas où $\omega = cte \Rightarrow \gamma_t = 0 \Rightarrow \gamma = \gamma_n$.

Comp norm : $\gamma_n = \frac{v^2}{\rho} = \gamma$

or $\gamma = R.\omega^2$.

$\frac{\omega^2(R^2+h^2)}{\rho} = R\omega^2 \Rightarrow \rho = \frac{R^2+h^2}{R} = cte$.

Mvt hélicoïdal uniforme : on remarque bien que $R \neq \rho$





Programmation
Informatique
Travaux Pratiques
Algébre
Cours
Optique
Chimie
Corrigés
Mathématiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..